$$\begin{aligned} f: X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{ausw}_x(f \oplus g) &= \mathrm{ausw}_x(f) + \mathrm{ausw}_x(g) \\ \mathrm{ausw}_x(f \odot g) &= \mathrm{ausw}_x(f) \cdot \mathrm{ausw}_x(g) \end{aligned}}$$

$$\emptyset \times B = \emptyset$$

$(a, b)$ mit $a \in \emptyset$
und $b \in B$

$$A \times \emptyset = \emptyset$$

---

Fü

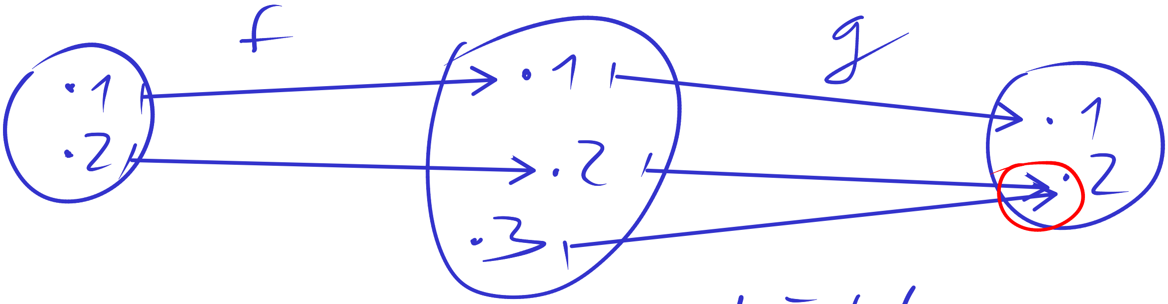
$A = \{1\}$

$B = \emptyset$

$A \times B = \emptyset$ ✓

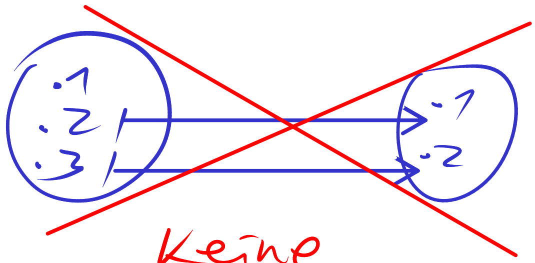
(a) ✗

(c) $A \cup B = \{1\} \neq \emptyset$ ✗




nicht injektiv

$g \circ f$ injektiv



Keine Abbildung

**Beh:** $f$ injektiv.

**Bew:** Seien $x_1, x_2 \in X$ mit

$$f(x_1) = f(x_2). \quad \mid g$$

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

Da $g \circ f$ injektiv ist, folgt:

$$x_1 = x_2 \qquad \square$$

$(G, *)$ Gruppe:

| | + | $\cdot$ |
|---|---|---|
| $*$ assoziativ | | |
| $\exists$ neutrales Element | $0$ | $1$ |
| $e$   $e * a = a$, $a * e = a$ | $0 + a = a$ $(a + 0 = a)$ | $1 \cdot a = a$ $(a \cdot 1 = a)$ |
| $\exists$ Inverse $a'$: $a' * a = e$, $a * a' = e$ | $-a$: $a - a = 0$, $-a + a = 0$ | $\bar{a}'$: $a \cdot \bar{a}' = 1$ |

$$*: G \times G \longrightarrow G$$

$$-: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$(a, b) \longmapsto a - b$$

$$\underbrace{(-1-2)-3}_{-6} \neq \underbrace{-1-(2-3)}_{0}$$

$$f: \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$$

$$x \longmapsto 1$$

$$\nexists\, g: \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$$

$g \circ f = id$

Jede Gruppe mit 2 Elementen ist isomorph $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$.

wahr

$$(\{+1, -1\}, \cdot)$$

$$\begin{pmatrix} \cap\!\!| \\ \mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

$G = \{e, a\}$

$*$

| $*$ | $e$ | $a$ |
|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ |
| $a$ | $a$ | $e$ |

$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$

| $+$ | $[0]$ | $[1]$ |
|---|---|---|
| $[0]$ | $[0]$ | $[1]$ |
| $[1]$ | $[1]$ | $[0]$ |

$$\{e, a\} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$e \longmapsto [0]$$

$$a \longmapsto [1]$$

ist bijektiv und

$$\begin{cases} f(e * e) = f(e) + f(e) \\ f(e * a) = f(e) + f(a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(a*e) = f(a)+f(e) \\ f(a*a) = f(a)+f(a) \end{cases}$$

Also ist $f$ Gruppenisomorphismus.

$$(\{1,-1\},\cdot) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},+)$$
$$1 \longmapsto [0]$$
$$-1 \longmapsto [1]$$

$\mathbb{Z}/4$

| + | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 0 | 1 | 2 |

$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$

| + | 0 | (0,1) | (1,0) | (1,1) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | (0,1) | (1,0) | (1,1) |
| (0,1) | (0,1) | 0 | (1,1) | (1,0) |
| (1,0) | (1,0) | (1,1) | 0 | (0,1) |
| (1,1) | (1,1) | (1,0) | (0,1) | 0 |

Beh: $\nexists$ bijektive $f: \mathbb{Z}/4 \longleftarrow \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$, die Gruppenhomomorphismus ist.

In $\mathbb{Z}/4$: 0

1

1+1

$1+1+1$

$\exists\, x \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ :

$$\{0, x, x+x, x+x+x\} = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

Ang., es gibt Isomorphism $f$.
Dann hat $f(x) \in \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$
die Eigenschaft

$$\{f(0), f(x), f(x+x), f(x+x+x)\} = f(\mathbb{Z}/4)$$

$$\{0, f(x), f(x)+f(x), f(x)+f(x)+f(x)\} = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$$

Ein solches Element gibt es nicht in $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$.